

# اثر رمسور-تاوان سند با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه

صدیقه میر ابوطالبی<sup>۱</sup> و زهره شهبازی<sup>۲</sup>

تاریخ ارسال شهریور ۹۵، پذیرش آبان ۹۵

**چکیده:** در آزمایش رمسور-تاوان سند رفتار سطح مقطع پراکندگی الکترون‌های کم انرژی از اتم‌های گاز نادر، مورد بررسی قرار می‌گیرد. از نقطه نظر کلاسیکی، انتظار می‌رود که احتمال پراکندگی برابر با احتمال تصادم بین ذرات الکترون با گاز باشد. اما، نتایج این آزمایش نشان می‌دهد که سطح مقطع پراکندگی برای انرژی‌های خاصی صفر است و از این‌رو، گذار بیشینه می‌تواند وجود داشته باشد. طول موج‌های تشدید گذار با توصیف کوانتومی این پدیده قابل استخراج می‌باشند که تطابق خوبی هم با نتایج تجربی دارند. از طرفی، با معرفی طول کمینه، طبق نظریه‌های کوانتوم گرانشی، اصل عدم قطعیت معمول هاینبرگ باید اصلاح شود که به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته معروف است. تصحیح طول موج‌های تشدید در چارچوب اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان اول تکانه قبلاً محاسبه شده‌اند. در این مقاله ما این اثر را با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه بررسی می‌نماییم و به محاسبه تصحیح طول موج‌های تشدید در این نظریه می‌پردازیم.

**واژه‌های کلیدی:** کوانتوم گرانشی، کمینه طول، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و اثر رمسور-تاوان سند.

## ۱. مقدمه

برای بررسی موقعیت ذره استفاده نمود، تا به این ترتیب  $\Delta p$  به اندازه کافی بزرگ شود. در صورتی که طبق نظریه‌های کوانتوم گرانشی، با افزایش انرژی به بیش از مقدار مشخصی، ناچار انرژی بسیار زیادی در فضایی کوچک متمرکز شده و مطابق با نسبیت عام، این انرژی زیاد در فضا - زمان اخلاص ایجاد نموده و منجر به خلق یک سیاه چاله می‌شود. این پدیده، با توجه به تکنولوژی کنونی بشر اجتناب ناپذیر است. حال چنانچه رابطه‌ی اصل عدم قطعیت

با توجه به رابطه عدم قطعیت  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ، به منظور آن که خطا در اندازه‌گیری موقعیت نسبی  $\Delta x$  کوچک شود، باید  $\Delta p$  به اندازه‌ی کافی زیاد باشد. بدین منظور باید از فوتون‌های با انرژی بسیار بزرگ

۱. دانشیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

S\_mirabotalebi@iau-tnb.ac.ir

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

( مثلاً برای انرژی الکترون در حدود  $0.7 \text{ eV}$  در گاز گزنون). بنابراین نتایج آزمایش اولیه به وضوح غیر کلاسیکی بود. اما، با ظهور مکانیک کوانتومی و توصیف خصوصیت موجی الکترون‌ها، نتیجه این آزمایش به خوبی قابل توضیح گردید [۵]. در نگرش بوهمی مکانیک کوانتومی، اتم به صورت یک چاه پتانسیل مربعی محدود در نظر گرفته می‌شود، [۶]. البته به طور نظری، یافتن انرژی‌هایی که دقیقاً به ازای آن‌ها، این پدیده رخ می‌دهد مشکل است و نیازمند محاسبات پیچیده در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی و تبادل الکترون و اثرات ناشی از چگونگی قطبش اسپین الکترون‌ها دارد. با این وجود مطالعات نظری و آزمایشگاهی بسیاری بر روی این پدیده صورت گرفته است، [۷].

در این مقاله اثر رمسور-تاون‌سند را در پراکندگی تک بعدی با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه بررسی می‌کنیم. قبلاً این اثر با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان یک تکانه بررسی شده است [۸]. پدیده تونل زنی از چاه پتانسیل محدود با اعمال اصل عدم قطعیت توان دوم تکانه در مراجع [۹] و [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. اما در این مقاله به طور خاص به توصیف پدیده رمسور-تاون‌سند با استفاده پدیده تونل زنی می-پردازیم. رابطه جا به جایی تعمیم یافته در چارچوب اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه، به صورت زیر است [۱] و [۱۱]:

$$(1) \quad |$$

به گونه‌ای تصحیح شود تا کمینه طول در آن وارد شود، مشکل محبوس شدن انرژی بسیار زیاد در یک فضای کوچک مرتفع می‌گردد و می‌توان با خطای تقریباً صفر، موقعیت ذرات کوچک را مشخص نمود. با توجه به نظریه‌های کوانتوم گرانشی این کمینه طول می‌تواند از مقیاس طول پلانک باشد. طول پلانک بی‌نهایت کوچک است و در

$$L_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 10^{-35} \text{ m} \quad \text{حدود}$$

است [۱]. با ورود این طول کمینه، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دچار تغییر مهمی می‌شود و جملاتی به آن اضافه می‌گردد. در این صورت این اصل به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ( $\text{GUP}^1$ ) منجر می‌شود. با تغییرات ایجاد شده در اصل عدم قطعیت استاندارد هایزنبرگ، انتظار می‌رود که سامانه‌های فیزیکی دچار تغییراتی شوند و اصلاح گردند، [۲].

آزمایش رمسور-تاون‌سند با عبور یک دسته از الکترون‌های کم انرژی در اتم‌های گاز نادر صورت می‌گیرد. این آزمایش به صورت جداگانه توسط کارل رمسور<sup>۲</sup> (بین سال‌های ۱۸۷۹-۱۹۵۵) و جان سیلی تاون‌سند<sup>۳</sup> (بین سال‌های ۱۸۶۸-۱۹۵۷) در اوایل ۱۹۲۰ صورت گرفته است، [۳] و [۴]. از نقطه نظر کلاسیکی احتمال تصادم الکترون‌ها و اتم‌ها با افزایش انرژی الکترون‌ها باید به صورت یکنواخت کم شود. اما رمسور-تاون‌سند مشاهده کردند که برای الکترون‌های با انرژی کم این احتمال می‌تواند بسیار کم باشد. در واقع، برای محیط گازهای نادری چون آرگون و کریپتون و یا گزنون احتمال تصادم باریکه کم انرژی از الکترون‌ها، احتمال تصادم کمینه دارد،

1-Generalized Uncertainty Principle

2 - Carl Ramsauer

3 - John Sealy Townsend

با توجه به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه و با استفاده از هامیلتونی تعمیم یافته رابطه (۵) معادله شرودینگر در یک بعد به این صورت در می آید:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{\beta}{m} \frac{\hbar^4 d^4\Psi(x)}{dx^4} - V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (۶)$$

با توجه به شکل (۱)، تابع پتانسیل در نواحی مختلف به صورت:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, x > a \\ -V_0 & 0 < x < a \end{cases}$$

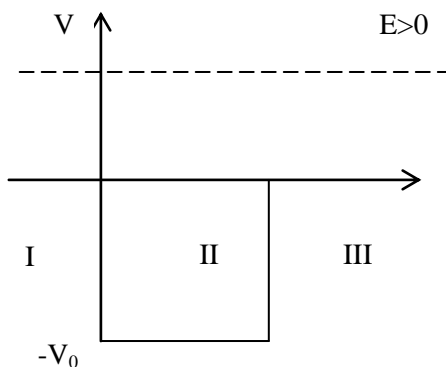
است و با توجه به این تعریف، معادله (۶) در نواحی مختلف شکل (۱) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - 2\beta\hbar^2 \frac{d^4\Psi(x)}{dx^4} + k_i^2\Psi(x) = 0$$

$$i = 1, 2 \quad (۷)$$

که در این رابطه برای نواحی  $x < 0$ ,  $x > a$  و ناحیه  $0 < x < a$   $i = 1$  و همچنین  $i = 2$  است. همچنین داریم:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, k_2 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \quad (۸)$$



شکل ۱. چاه پتانسیل یک بعدی در اثر رمسور - تاوانسند [۸]

که در آن  $\beta = \frac{Lp^2}{2\hbar^2}$  می باشد. با استفاده از رابطه اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، تکانه و موقعیت را به صورت زیر می توان تعریف نمود [۱۲]:

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2} \{1 + \beta[(\Delta p)^2 + \langle p \rangle^2] + 2\beta(\Delta p_i^2 + \langle p_i \rangle^2)\}, i = 1, 2, 3 \quad (۲)$$

که در رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$(۳)$$

که  $x_{0i}$  و  $p_{0i}$  مکان و تکانه معمولی (در عدم حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته) می باشند. روابط جابه جاگری برای آن دو عبارت است از:

$$[x_{0i}, p_{0j}] = i\hbar \delta_{ij} \quad (۴)$$

با قرار دادن اندازه حرکت  $p_{0i}$  مطابق رابطه (۳) در هامیلتونی  $H = \frac{p^2}{2m}$  خواهیم داشت:

$$H = \frac{p_0^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{\beta}{m} p_0^4 + \frac{\beta^2}{2m} p_0^6 \quad (۵)$$

در رابطه (۵) هامیلتونین تعمیم یافته دیده می شود. در این رابطه، جملات سوم و چهارم جملات اصلاحی هامیلتونی با توجه به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته بوجود آمده اند و جملات اول و دوم هامیلتونی در غیاب اثرات طول کمینه می باشند.

## ۲. اثر رمسور-تاوانسند با اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه

به صورتی که  $C, L, H, G, F, B, A$  و  $D$  پارامترهای ثابت هستند. شرایط مرزی با برقراری تساوی بین مشتق توابع موج تا مشتق مرتبه سوم به شکل زیر است:

$$d^n \psi_I |_{x=0} = d^n \psi_{II} |_{x=0} \quad (18)$$

$$d^n \psi_{II} |_{x=a} = d^n \psi_{III} |_{x=a} \quad (19)$$

با اعمال شرایط مرزی بالا تا  $n = 0, 1, 2, 3$ ، ضریب گذار  $T$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T = \left[ 1 + \left( \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 a \right)^2 \right]^{-1} \quad (20)$$

این نتیجه مشابه نتیجه بدست آمده در مرجع [۹] است. مقدار گذار  $T$  با صفر شدن  $\sin k_1 a$ ، برابر  $T = 1$  می‌شود. در این حالت ویژه، مقدار انعکاس موج از سطح چاه پتانسیل برابر صفر خواهد شد. در این حالت، تمام تابع موج از چاه پتانسیل عبور می‌کند. این همان پدیده رمسور-تاون سند است. در این حالت خاص داریم:

$$k_r a = \frac{n\pi}{\alpha} \quad (21)$$

که با اعمال رابطه (۱۷) به صورت

$$k_r \left( 1 - \frac{L_p^2}{2} k_r^2 \right) = \frac{n\pi}{a} \quad (22)$$

درمی‌آید. رابطه (۲۲) در واقع اعداد موج  $k_r$  را مشخص می‌کند که به ازای آن‌ها پدیده رمسور-تاون سند رخ می‌دهد. در غیاب اثرات اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP)، یعنی برای حالت  $\beta = 0$ ، از رابطه (۲۲) داریم:  $k_{ord} = \frac{n\pi}{a}$ . حال در حضور اثرات GUP این اعداد موج به میزان  $\Delta k_r = k_r - k_{ord}$  انتقال می‌یابند. این انتقال تقریباً به میزان

با در نظر گرفتن پاسخ معادلات (۷) به صورت  $\psi \propto e^{p_x}$  در ناحیه های مختلف شکل (۱)، خواهیم داشت:

$$p \quad (9)$$

با توجه به این که  $\beta = \frac{L_p^2}{2\hbar^2}$  می‌توان معادله (۹) را به این صورت تعریف کرد:

$$p_i^2 + k_i^2 - L_p^2 p_i^4 = 0 \quad (10)$$

جواب معادله (۱۰) برای  $p$  به صورت زیر است:

$$p_i = \frac{1}{L_p} \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 + 4k_i^2 L_p^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$p_i = -\frac{1}{L_p} \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 + 4k_i^2 L_p^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

با بسط سری تیلور روابط بالا، خواهیم داشت:

$$p_i \approx \left[ \pm \frac{1}{L_p}, \pm i k_i \left( 1 - \frac{k_i^2 L_p^2}{2} \right) \right] \quad (13)$$

حال، تابع موج  $\psi$  در سه ناحیه شکل (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\psi_I = e^{i k_1 x} + R e^{-i k_1 x} + B e^{x/L_p} \quad (14)$$

$$\psi_{II} = F e^{i k_2 x} + G e^{-i k_2 x} + H e^{x/L_p} + L e^{-x/L_p} \quad (15)$$

$$\psi_{III} = T e^{i k_1 x} + D e^{-x/L_p} \quad (16)$$

که در این روابط  $k_i$  به شکل زیر می‌باشد:

$$k_i = k_i \left( 1 - \frac{k_i^2 L_p^2}{2} \right) \quad (17)$$

موج تشدید نشان می‌دهد. در این‌جا نشان داده شد، که در چارچوب GUP با توان دوم تکانه، در اعداد موج تشدیدی اثر رمسور-تاوانسند انتقالی بوجود می‌آید. مقدار این انتقال خود وابسته به اعداد موج تشدیدی است. میزان این انتقال بسیار کوچک است و از درجه بزرگی  $L_p^2$  می‌باشد. به دلیل این انتقال همچنین انتظار می‌رود که طول موج تشدیدی در تداخل سنج فابری پرو تغییر یابد. میزان این تغییر در این‌جا محاسبه و ارائه شده است.

### مراجع

[1] Kempf A, Mangano G., Mann R. B., Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation, Phys. Rev. D 52, 1995, 1108 .

۲- صبور زهرا، فاطمه قلیاب تاب، صدیقه میرابوطالبی، تصحیح تابع پارش گاز کامل با اعمال مقیاس پلانک، فصل‌نامه فیزیک اتمی مولکولی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران- شمال، شماره ۱۷، زمستان ۱۳۹۲.

[3] Bailey, V. A. and Townsend, J. S., The motion of electrons in gases, Philosophical Magazine, S.6, 42, 1921, 873.

[4] Ramsauer C., Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen, Annalen der Physik, 4, 64, 1921, 513.

[5] Landau L.D., Lifshitz E. M., Quantum Mechanics. Non-Relativeistic Theory, Elsevier Sci, ISBN13, 2003, 978-0750635394.

[6] Bohm, D., Quantum Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1951.

[7] Johnson, W. R., and Guet, C., "Elastic scattering of electrons from Xe, Cs<sup>+</sup>, and Ba<sup>2+</sup>, Phys. Rev. A 49, 1994, 1041.

$$\Delta k_r / k_{ord} = \frac{L_p^2}{2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \quad (23)$$

می‌باشد. این نتیجه متفاوت از رابطه مرجع [۸] است. این امر با توجه به متفاوت بودن نوع مدل GUP در این مقاله و مرجع مورد نظر منطقی می‌باشد. همچنین در مکانیک کوانتومی معمولی، در غیاب اثرات GUP، طول موج تشدید معمولی به صورت:

$$\lambda_{ord} = \frac{2\pi}{k_{ord}} = \frac{2a}{n} \quad (24)$$

می‌شود که این شرط مشابه تداخل سنج فابری پرو<sup>۴</sup> می‌باشد. حال در حضور اثرات GUP، این شرط به شکل زیر درمی‌آید:

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{k_{ord} + \Delta k_r} \approx \frac{2\pi}{k_{ord}} \left( 1 - \frac{\Delta k_r}{k_{ord}} \right) \quad (25)$$

$$\lambda_r \approx \lambda_{ord} \left[ 1 + \frac{L_p^2}{2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] \quad (26)$$

بنابراین در حضور اثرات GUP، شرط تداخل در تداخل سنج فابری پرو، اصلاح می‌شود. این جمله اصلاحی، متفاوت از نتیجه بدست آمده در مرجع [۸] است. اما همانطور که در مرجع [۸] بدست آمده، جمله اصلاحی خود به طول موج وابسته می‌باشد.

### ۵. نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی اثر رمسور-تاوانسند در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان دوم تکانه پرداختیم. در مرجع [۸] همین پدیده با اعمال اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با توان یک تکانه مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج بدست آمده در این‌جا، با توجه به متفاوت بودن مدل GUP، مختلف است اما به صورت کلی مشابه می‌باشد و وابستگی‌های مشابه‌ای را به پارامترهای تاثیر گذاری همچون طول

<sup>4</sup> - Fabry-Prot interferometer

[8] Vahedi J., Nozari K., The Ramsauer-Townsend Effect in the Presence of the Minimal Length and Maximal Momentum, *Phys. Acta. plonica A.122* (1), 2012, 38.

[9] Das S., Vagenas E.C., Universality of quantum gravity correction, *Physical review letters*, 101(22) 2008, 221301.

[10] Das S., Vagenas E. C., Phenomenological Implications of the Generalized Uncertainty Principle, *Canadian Journal of Physics*, 87(3), 2009, 233.

[11] Benczik S., Chang L. N., Minic D. and Takeuchi T., *Phys. Rev. A* 72, 2005, 012104.

[12] Amati D., Ciafaloni M., Veneziano G., *Phys. Lett. B* 216, 1989, 41.

# The Ramsauer-Townsend effect with generalized uncertainty principle with the second order of momentum

S. Miraboutalebi and Z. Shahbazi

## Abstract

In the Ramsauer-Townsend experiment, the scattering of the electron beam by atoms of the noble gas is studied. From the classical point of view, for the low energy beam, it is expected that the scattering amplitude is equal to the collision amplitude. However, the experimental results show that the scattering amplitude vanishes for special energies and hence the transition amplitude can be maximum. Fortunately, the resonance wavelengths can be calculated via quantum mechanics and confirm with the experimental results. The modifications of these resonance wavelengths also have been studied in the frame work of the generalized quantum mechanics with the Planck scale corrections of the first order of momentum. Here, we investigate the modified wavelengths via the generalized quantum mechanics with the second order of momentum.

**Keywords:** Quantum Gravity, Minimal length, Generalized uncertainty principle, Ramsauer-Townsend effect.